Feynman rules for the Euler-Heisenberg EFT

Thomas Becher (thomas.becher@unibe.ch), April 2024

In[1]:=
```
<< DiracAlgebra`;
```

The DiracAlgebra package is not public but can be obtained from the author.

Fourier transform

Fourier transform for c1

In[2]:=
```
F[A_, k_, μ_, ν_] = kμ Aν - kν Aμ;
```

In[3]:=
```
vertex =
  F[A1, k1, μ, ν] × F[A2, k2, μ, ν] × F[A3, k3, σ, ρ] ×
    F[A4, k4, σ, ρ] // γSimp
```

Out[3]=
```
4 A1 · k2 A2 · k1 A3 · k4 A4 · k3 -
  4 A1 · A2 A3 · k4 A4 · k3 k1 · k2 -
  4 A1 · k2 A2 · k1 A3 · A4 k3 · k4 +
  4 A1 · A2 A3 · A4 k1 · k2 k3 · k4
```

Remove the fields to get the Feynman rule for c1

Feynman rule for c2

In[10]:= vertex =
  F[A1, k1, μ, ν] × F[A2, k2, ν, σ] × F[A3, k3, σ, ρ] ×
   F[A4, k4, ρ, μ] // γSimp

Out[10]= $A1\cdot k2\, A2\cdot k3\, A3\cdot k4\, A4\cdot k1 + A1\cdot k4\, A2\cdot k1\, A3\cdot k2\, A4\cdot k3 +$
$A1\cdot k4\, A2\cdot k3\, A3\cdot A4\, k1\cdot k2 - A1\cdot A4\, A2\cdot k3\, A3\cdot k4\, k1\cdot k2 -$
$A1\cdot k4\, A2\cdot A3\, A4\cdot k3\, k1\cdot k2 - A1\cdot k2\, A2\cdot k3\, A3\cdot A4\, k1\cdot k4 +$
$A1\cdot k2\, A2\cdot A3\, A4\cdot k3\, k1\cdot k4 - A1\cdot A2\, A3\cdot k2\, A4\cdot k3\, k1\cdot k4 -$
$A1\cdot k4\, A2\cdot k1\, A3\cdot A4\, k2\cdot k3 + A1\cdot A4\, A2\cdot k1\, A3\cdot k4\, k2\cdot k3 -$
$A1\cdot A2\, A3\cdot k4\, A4\cdot k1\, k2\cdot k3 + A1\cdot A2\, A3\cdot A4\, k1\cdot k4\, k2\cdot k3 -$
$A1\cdot A4\, A2\cdot k1\, A3\cdot k2\, k3\cdot k4 - A1\cdot k2\, A2\cdot A3\, A4\cdot k1\, k3\cdot k4 +$
$A1\cdot A2\, A3\cdot k2\, A4\cdot k1\, k3\cdot k4 + A1\cdot A4\, A2\cdot A3\, k1\cdot k2\, k3\cdot k4$

Remove the fields to get the Feynman rule for c2

Symmetrization

Feynman rules, from above

In[19]:= feynRuleC1 = $+4\, k1\cdot k2\, k3\cdot k4\, g_{\mu 1,\mu 2}\, g_{\mu 3,\mu 4} +$
 $4\, k1_{\mu 2}\, k2_{\mu 1}\, k3_{\mu 4}\, k4_{\mu 3} - 4\, k1\cdot k2\, k3_{\mu 4}\, k4_{\mu 3}\, g_{\mu 1,\mu 2} -$
 $4\, k3\cdot k4\, k1_{\mu 2}\, k2_{\mu 1}\, g_{\mu 3,\mu 4}$;

In[20]:= feynRuleC2 = $k1_{\mu 2}\, k2_{\mu 3}\, k3_{\mu 4}\, k4_{\mu 1} + k1_{\mu 4}\, k2_{\mu 1}\, k3_{\mu 2}\, k4_{\mu 3} +$
 $k3\cdot k4\, k1_{\mu 4}\, k2_{\mu 3}\, g_{\mu 1,\mu 2} - k1\cdot k4\, k2_{\mu 3}\, k3_{\mu 4}\, g_{\mu 1,\mu 2} -$
 $k2\cdot k3\, k1_{\mu 4}\, k4_{\mu 3}\, g_{\mu 1,\mu 2} - k3\cdot k4\, k1_{\mu 2}\, k2_{\mu 3}\, g_{\mu 1,\mu 4} +$
 $k2\cdot k3\, k1_{\mu 2}\, k4_{\mu 3}\, g_{\mu 1,\mu 4} - k1\cdot k2\, k3_{\mu 2}\, k4_{\mu 3}\, g_{\mu 1,\mu 4} -$
 $k3\cdot k4\, k1_{\mu 4}\, k2_{\mu 1}\, g_{\mu 2,\mu 3} + k1\cdot k4\, k2_{\mu 1}\, k3_{\mu 4}\, g_{\mu 2,\mu 3} -$
 $k1\cdot k2\, k3_{\mu 4}\, k4_{\mu 1}\, g_{\mu 2,\mu 3} + k1\cdot k2\, k3\cdot k4\, g_{\mu 1,\mu 4}\, g_{\mu 2,\mu 3} -$
 $k1\cdot k4\, k2_{\mu 1}\, k3_{\mu 2}\, g_{\mu 3,\mu 4} - k2\cdot k3\, k1_{\mu 2}\, k4_{\mu 1}\, g_{\mu 3,\mu 4} +$
 $k1\cdot k2\, k3_{\mu 2}\, k4_{\mu 1}\, g_{\mu 3,\mu 4} + k1\cdot k4\, k2\cdot k3\, g_{\mu 1,\mu 2}\, g_{\mu 3,\mu 4}$;

Now symmetrize

In[21]:=
```
vecs = {k1, k2, k3, k4};
```

In[22]:=
```
μs = {μ1, μ2, μ3, μ4};
```

In[23]:=
```
permsk = Permutations[vecs];
```

In[24]:=
```
permsμ = Permutations[μs];
```

In[25]:=
```
feynRuleC1symm =
 Sum[feynRuleC1 /. Inner[Rule, μs, permsμ〚i〛, List] /.
   Inner[Rule, vecs, permsk〚i〛, List],
  {i, 1, Length[permsμ]}]
```

Out[25]=
$$32\, k1_{\mu 4}\, k2_{\mu 3}\, k3_{\mu 2}\, k4_{\mu 1} + 32\, k1_{\mu 3}\, k2_{\mu 4}\, k3_{\mu 1}\, k4_{\mu 2} + 32\, k1_{\mu 2}\, k2_{\mu 1}\, k3_{\mu 4}\, k4_{\mu 3} - 32\, k1 \cdot k2\, k3_{\mu 4}\, k4_{\mu 3}\, g_{\mu 1,\mu 2} - 32\, k1 \cdot k3\, k2_{\mu 4}\, k4_{\mu 2}\, g_{\mu 1,\mu 3} - 32\, k1 \cdot k4\, k2_{\mu 3}\, k3_{\mu 2}\, g_{\mu 1,\mu 4} - 32\, k2 \cdot k3\, k1_{\mu 4}\, k4_{\mu 1}\, g_{\mu 2,\mu 3} + 32\, k1 \cdot k4\, k2 \cdot k3\, g_{\mu 1,\mu 4}\, g_{\mu 2,\mu 3} - 32\, k2 \cdot k4\, k1_{\mu 3}\, k3_{\mu 1}\, g_{\mu 2,\mu 4} + 32\, k1 \cdot k3\, k2 \cdot k4\, g_{\mu 1,\mu 3}\, g_{\mu 2,\mu 4} - 32\, k3 \cdot k4\, k1_{\mu 2}\, k2_{\mu 1}\, g_{\mu 3,\mu 4} + 32\, k1 \cdot k2\, k3 \cdot k4\, g_{\mu 1,\mu 2}\, g_{\mu 3,\mu 4}$$

In[26]:=
```
feynRuleC2symm =
  Sum[feynRuleC2 /. Inner[Rule, μs, permsμ[[i]], List] /.
    Inner[Rule, vecs, permsk[[i]], List],
   {i, 1, Length[permsμ]}]
```

Out[26]=
$$
\begin{aligned}
&8\, k1_{\mu3}\, k2_{\mu4}\, k3_{\mu2}\, k4_{\mu1} + 8\, k1_{\mu2}\, k2_{\mu3}\, k3_{\mu4}\, k4_{\mu1} + \\
&8\, k1_{\mu4}\, k2_{\mu3}\, k3_{\mu1}\, k4_{\mu2} + 8\, k1_{\mu3}\, k2_{\mu1}\, k3_{\mu4}\, k4_{\mu2} + \\
&8\, k1_{\mu2}\, k2_{\mu4}\, k3_{\mu1}\, k4_{\mu3} + 8\, k1_{\mu4}\, k2_{\mu1}\, k3_{\mu2}\, k4_{\mu3} + \\
&8\, k3\cdot k4\, k1_{\mu4}\, k2_{\mu3}\, g_{\mu1,\mu2} + 8\, k3\cdot k4\, k1_{\mu3}\, k2_{\mu4}\, g_{\mu1,\mu2} - \\
&8\, k2\cdot k4\, k1_{\mu3}\, k3_{\mu4}\, g_{\mu1,\mu2} - 8\, k1\cdot k4\, k2_{\mu3}\, k3_{\mu4}\, g_{\mu1,\mu2} - \\
&8\, k2\cdot k3\, k1_{\mu4}\, k4_{\mu3}\, g_{\mu1,\mu2} - 8\, k1\cdot k3\, k2_{\mu4}\, k4_{\mu3}\, g_{\mu1,\mu2} - \\
&8\, k3\cdot k4\, k1_{\mu2}\, k2_{\mu4}\, g_{\mu1,\mu3} + 8\, k2\cdot k4\, k1_{\mu4}\, k3_{\mu2}\, g_{\mu1,\mu3} - \\
&8\, k1\cdot k4\, k2_{\mu4}\, k3_{\mu2}\, g_{\mu1,\mu3} + 8\, k2\cdot k4\, k1_{\mu2}\, k3_{\mu4}\, g_{\mu1,\mu3} - \\
&8\, k2\cdot k3\, k1_{\mu4}\, k4_{\mu2}\, g_{\mu1,\mu3} - 8\, k1\cdot k2\, k3_{\mu4}\, k4_{\mu2}\, g_{\mu1,\mu3} - \\
&8\, k3\cdot k4\, k1_{\mu2}\, k2_{\mu3}\, g_{\mu1,\mu4} - 8\, k2\cdot k4\, k1_{\mu3}\, k3_{\mu2}\, g_{\mu1,\mu4} + \\
&8\, k2\cdot k3\, k1_{\mu3}\, k4_{\mu2}\, g_{\mu1,\mu4} - 8\, k1\cdot k3\, k2_{\mu3}\, k4_{\mu2}\, g_{\mu1,\mu4} + \\
&8\, k2\cdot k3\, k1_{\mu2}\, k4_{\mu3}\, g_{\mu1,\mu4} - 8\, k1\cdot k2\, k3_{\mu2}\, k4_{\mu3}\, g_{\mu1,\mu4} - \\
&8\, k3\cdot k4\, k1_{\mu4}\, k2_{\mu1}\, g_{\mu2,\mu3} - 8\, k2\cdot k4\, k1_{\mu4}\, k3_{\mu1}\, g_{\mu2,\mu3} + \\
&8\, k1\cdot k4\, k2_{\mu4}\, k3_{\mu1}\, g_{\mu2,\mu3} + 8\, k1\cdot k4\, k2_{\mu1}\, k3_{\mu4}\, g_{\mu2,\mu3} - \\
&8\, k1\cdot k3\, k2_{\mu4}\, k4_{\mu1}\, g_{\mu2,\mu3} - 8\, k1\cdot k2\, k3_{\mu4}\, k4_{\mu1}\, g_{\mu2,\mu3} + \\
&8\, k1\cdot k3\, k2\cdot k4\, g_{\mu1,\mu4}\, g_{\mu2,\mu3} + 8\, k1\cdot k2\, k3\cdot k4\, g_{\mu1,\mu4}\, g_{\mu2,\mu3} - \\
&8\, k3\cdot k4\, k1_{\mu3}\, k2_{\mu1}\, g_{\mu2,\mu4} - 8\, k1\cdot k4\, k2_{\mu3}\, k3_{\mu1}\, g_{\mu2,\mu4} - \\
&8\, k2\cdot k3\, k1_{\mu3}\, k4_{\mu1}\, g_{\mu2,\mu4} + 8\, k1\cdot k3\, k2_{\mu3}\, k4_{\mu1}\, g_{\mu2,\mu4} + \\
&8\, k1\cdot k3\, k2_{\mu1}\, k4_{\mu3}\, g_{\mu2,\mu4} - 8\, k1\cdot k2\, k3_{\mu1}\, k4_{\mu3}\, g_{\mu2,\mu4} + \\
&8\, k1\cdot k4\, k2\cdot k3\, g_{\mu1,\mu3}\, g_{\mu2,\mu4} + 8\, k1\cdot k2\, k3\cdot k4\, g_{\mu1,\mu3}\, g_{\mu2,\mu4} - \\
&8\, k2\cdot k4\, k1_{\mu2}\, k3_{\mu1}\, g_{\mu3,\mu4} - 8\, k1\cdot k4\, k2_{\mu1}\, k3_{\mu2}\, g_{\mu3,\mu4} - \\
&8\, k2\cdot k3\, k1_{\mu2}\, k4_{\mu1}\, g_{\mu3,\mu4} + 8\, k1\cdot k2\, k3_{\mu2}\, k4_{\mu1}\, g_{\mu3,\mu4} - \\
&8\, k1\cdot k3\, k2_{\mu1}\, k4_{\mu2}\, g_{\mu3,\mu4} + 8\, k1\cdot k2\, k3_{\mu1}\, k4_{\mu2}\, g_{\mu3,\mu4} + \\
&8\, k1\cdot k4\, k2\cdot k3\, g_{\mu1,\mu2}\, g_{\mu3,\mu4} + 8\, k1\cdot k3\, k2\cdot k4\, g_{\mu1,\mu2}\, g_{\mu3,\mu4}
\end{aligned}
$$

Cross section

amplitude squared

Square amplitude and sum over polarizations. Note that we can replace $\Sigma_\lambda \epsilon_{\mu 1}(\lambda) \cdot \epsilon_{\mu 2}(\lambda) = -g_{\mu 1,\mu 2}$

```
ampSquared =
  ((-1)^4 (c1 feynRuleC1symm + c2 feynRuleC2symm)^2 /.
      k3 → -k3 /. k4 → -k4 // γSimp) /. d → 4
```

```
10 240 c1^2 (k1 · k4)^2 (k2 · k3)^2 +
 7168 c1 c2 (k1 · k4)^2 (k2 · k3)^2 +
 1664 c2^2 (k1 · k4)^2 (k2 · k3)^2 -
 8192 c1^2 k1 · k3 k1 · k4 k2 · k3 k2 · k4 -
 4096 c1 c2 k1 · k3 k1 · k4 k2 · k3 k2 · k4 -
 512 c2^2 k1 · k3 k1 · k4 k2 · k3 k2 · k4 +
 10 240 c1^2 (k1 · k3)^2 (k2 · k4)^2 +
 7168 c1 c2 (k1 · k3)^2 (k2 · k4)^2 +
 1664 c2^2 (k1 · k3)^2 (k2 · k4)^2 +
 2048 c1^2 (k1 · k4)^2 k2 · k2 k3 · k3 +
 4096 c1 c2 (k1 · k4)^2 k2 · k2 k3 · k3 +
 1024 c2^2 (k1 · k4)^2 k2 · k2 k3 · k3 +
 6144 c1^2 k1 · k2 k1 · k4 k2 · k4 k3 · k3 +
 3072 c1 c2 k1 · k2 k1 · k4 k2 · k4 k3 · k3 +
 384 c2^2 k1 · k2 k1 · k4 k2 · k4 k3 · k3 +
 2048 c1^2 k1 · k1 (k2 · k4)^2 k3 · k3 +
 4096 c1 c2 k1 · k1 (k2 · k4)^2 k3 · k3 +
 1024 c2^2 k1 · k1 (k2 · k4)^2 k3 · k3 +
 6144 c1^2 k1 · k3 k1 · k4 k2 · k2 k3 · k4 +
 3072 c1 c2 k1 · k3 k1 · k4 k2 · k2 k3 · k4 +
 384 c2^2 k1 · k3 k1 · k4 k2 · k2 k3 · k4 -
 8192 c1^2 k1 · k2 k1 · k4 k2 · k3 k3 · k4 -
 4096 c1 c2 k1 · k2 k1 · k4 k2 · k3 k3 · k4 -
```

$$
\begin{aligned}
&512\, c2^2\, k1\cdot k2\, k1\cdot k4\, k2\cdot k3\, k3\cdot k4 - \\
&8192\, c1^2\, k1\cdot k2\, k1\cdot k3\, k2\cdot k4\, k3\cdot k4 - \\
&4096\, c1\, c2\, k1\cdot k2\, k1\cdot k3\, k2\cdot k4\, k3\cdot k4 - \\
&512\, c2^2\, k1\cdot k2\, k1\cdot k3\, k2\cdot k4\, k3\cdot k4 + \\
&6144\, c1^2\, k1\cdot k1\, k2\cdot k3\, k2\cdot k4\, k3\cdot k4 + \\
&3072\, c1\, c2\, k1\cdot k1\, k2\cdot k3\, k2\cdot k4\, k3\cdot k4 + \\
&384\, c2^2\, k1\cdot k1\, k2\cdot k3\, k2\cdot k4\, k3\cdot k4 + \\
&10\,240\, c1^2\, (k1\cdot k2)^2\, (k3\cdot k4)^2 + \\
&7168\, c1\, c2\, (k1\cdot k2)^2\, (k3\cdot k4)^2 + \\
&1664\, c2^2\, (k1\cdot k2)^2\, (k3\cdot k4)^2 + \\
&2048\, c1^2\, k1\cdot k1\, k2\cdot k2\, (k3\cdot k4)^2 + \\
&4096\, c1\, c2\, k1\cdot k1\, k2\cdot k2\, (k3\cdot k4)^2 + \\
&1024\, c2^2\, k1\cdot k1\, k2\cdot k2\, (k3\cdot k4)^2 + \\
&2048\, c1^2\, (k1\cdot k3)^2\, k2\cdot k2\, k4\cdot k4 + \\
&4096\, c1\, c2\, (k1\cdot k3)^2\, k2\cdot k2\, k4\cdot k4 + \\
&1024\, c2^2\, (k1\cdot k3)^2\, k2\cdot k2\, k4\cdot k4 + \\
&6144\, c1^2\, k1\cdot k2\, k1\cdot k3\, k2\cdot k3\, k4\cdot k4 + \\
&3072\, c1\, c2\, k1\cdot k2\, k1\cdot k3\, k2\cdot k3\, k4\cdot k4 + \\
&384\, c2^2\, k1\cdot k2\, k1\cdot k3\, k2\cdot k3\, k4\cdot k4 + \\
&2048\, c1^2\, k1\cdot k1\, (k2\cdot k3)^2\, k4\cdot k4 + \\
&4096\, c1\, c2\, k1\cdot k1\, (k2\cdot k3)^2\, k4\cdot k4 + \\
&1024\, c2^2\, k1\cdot k1\, (k2\cdot k3)^2\, k4\cdot k4 + \\
&2048\, c1^2\, (k1\cdot k2)^2\, k3\cdot k3\, k4\cdot k4 + \\
&4096\, c1\, c2\, (k1\cdot k2)^2\, k3\cdot k3\, k4\cdot k4 + \\
&1024\, c2^2\, (k1\cdot k2)^2\, k3\cdot k3\, k4\cdot k4 + \\
&3072\, c1^2\, k1\cdot k1\, k2\cdot k2\, k3\cdot k3\, k4\cdot k4 + \\
&384\, c2^2\, k1\cdot k1\, k2\cdot k2\, k3\cdot k3\, k4\cdot k4
\end{aligned}
$$

```
ampSquared2 =
  (ampSquared /. k4 → k1 + k2 - k3 // Expand) /.
    k_ · k_ → 0 /. d → 4
```

$$12288\, c1^2\, (k1\cdot k2)^2\, (k1\cdot k3)^2 + 10240\, c1\, c2\, (k1\cdot k2)^2\, (k1\cdot k3)^2 + 2816\, c2^2\, (k1\cdot k2)^2\, (k1\cdot k3)^2 + 8192\, c1^2\, (k1\cdot k2)^2\, k1\cdot k3\, k2\cdot k3 + 8192\, c1\, c2\, (k1\cdot k2)^2\, k1\cdot k3\, k2\cdot k3 + 2560\, c2^2\, (k1\cdot k2)^2\, k1\cdot k3\, k2\cdot k3 - 8192\, c1^2\, k1\cdot k2\, (k1\cdot k3)^2\, k2\cdot k3 - 8192\, c1\, c2\, k1\cdot k2\, (k1\cdot k3)^2\, k2\cdot k3 - 2560\, c2^2\, k1\cdot k2\, (k1\cdot k3)^2\, k2\cdot k3 + 12288\, c1^2\, (k1\cdot k2)^2\, (k2\cdot k3)^2 + 10240\, c1\, c2\, (k1\cdot k2)^2\, (k2\cdot k3)^2 + 2816\, c2^2\, (k1\cdot k2)^2\, (k2\cdot k3)^2 - 8192\, c1^2\, k1\cdot k2\, k1\cdot k3\, (k2\cdot k3)^2 - 8192\, c1\, c2\, k1\cdot k2\, k1\cdot k3\, (k2\cdot k3)^2 - 2560\, c2^2\, k1\cdot k2\, k1\cdot k3\, (k2\cdot k3)^2 + 12288\, c1^2\, (k1\cdot k3)^2\, (k2\cdot k3)^2 + 10240\, c1\, c2\, (k1\cdot k3)^2\, (k2\cdot k3)^2 + 2816\, c2^2\, (k1\cdot k3)^2\, (k2\cdot k3)^2$$

Kinematics

```
kinemat =
  {k1 → En {1, 0, 0, 1}, k2 → En {1, 0, 0, -1},
    k3 → En {1, Sin[θ], 0, Cos[θ]},
    k4 → En {1, -Sin[θ], 0, -Cos[θ]}} /. En → Q / 2;

Sp[a_, b_] := (a /. kinemat)[[1]] (b /. kinemat)[[1]] -
   Drop[a /. kinemat, 1].Drop[b /. kinemat, 1];

ampSquared3 =
 ampSquared2 /. (a_ · b_) :> Sp[a, b] // FullSimplify //
   TrigExpand // Simplify
```

$$\frac{1}{4}\left(48\, c1^2 + 40\, c1\, c2 + 11\, c2^2\right) Q^8\, (7 + \mathrm{Cos}[2\,\theta])^2$$

```
ampSquared4 =
  ampSquared3 /. oo → 1 /. Cos[2 θ] → 2 Cθ^2 - 1 // Simplify
```

$$\left(48\, c1^2 + 40\, c1\, c2 + 11\, c2^2\right) \left(3 + C\theta^2\right)^2 Q^8$$

Cross section

General 2⟶2 formula for equal masses. “M2” is the squared amplitude

$$d\sigma d\Omega = \frac{M2}{64\, \pi^2\, Q^2};$$

Average over incoming polarizations:

$$d\sigma d\Omega 2 = d\sigma d\Omega \;/.\; M2 \to \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{me^8}\, ampSquared4 \;/.\; Q \to 2\, E\gamma$$

$$\frac{\left(48\, c1^2 + 40\, c1\, c2 + 11\, c2^2\right) \left(3 + C\theta^2\right)^2 E\gamma^6}{4\, me^8\, \pi^2}$$

$$values = \left\{c1 \to -\frac{1}{36}\, \alpha^2,\; c2 \to \frac{7}{90}\, \alpha^2\right\};$$

$$d\sigma d\Omega 3 = HoldForm\left[\left(\frac{\alpha^2}{180\, \pi}\right)^2\right] \frac{(180\, \pi)^2}{\alpha^4}\, d\sigma d\Omega 2 \;/.\; values$$

$$\frac{139\, \left(3 + C\theta^2\right)^2 E\gamma^6 \left(\frac{\alpha^2}{180\, \pi}\right)^2}{me^8}$$